4 РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть задана непрерывная функция *f(x)* и требуется найти все или некоторые корни уравнения

$$f(x) = 0 \qquad (22)$$

Эта задача обычно решается в два этапа:

1. Отделение корней. Изучается расположение корней (в общем случае на комплексной плоскости) и проводится их разделение, т.е. выделяются области в комплексной плоскости, содержащие только один корень. Кроме того изучается вопрос о кратности корней. Тем самым, находятся некоторые начальные приближения для корней уравнения (1).

2. Уточнение корней.Строится итерационный процесс, использующий заданное начальное приближение и позволяющий уточнить значение отыскиваемого корня.

4.1 Отделение корней

Первая задача решается аналитическими и графическими методами.

Аналитические методы. Если ищутся только действительные корни уравнения, то полезно составить таблицу значений *f(x)*. Если в двух соседних узлах таблицы функция имеет разные знаки, то между этими узлами лежит нечетное число корней уравнения (по меньшей мере один). Выявить по таблице корни четной кратности сложно.

Если функция *f(x)*представляет из себя многочлен $f(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$,

то он имеет ровно *n* комплексных корней, не обязательно различных, и все корни лежат внутри круга $|x_p| \le 1 + \frac{1}{|a_n|} \max(|a_0|, |a_1|, .. |a_{n-1}|)$

Геометрические методы.По таблице можно построить график функции *y=f(x)* и графически найти точки его пересечения с осью абсцисс. Этот способ более нагляден и дает неплохие приближенные значения корней. Построение графиков зачастую позволяет выявить даже корни четной кратности.

Иногда удается заменить уравнение (15) эквивалентным ему уравнением φ(x)=ψ(x) в котором функции y=φ(x) и y=ψ(x) имеют несложные графики. Например, уравнение xsinx-1=0 удобно преобразовать к виду sinx=1/x. Абсциссы точек пересечения этих графиков будут корнями исходногоуравнения.

4.2 Уточнение корней

4.2.1 Метод половинного деления (дихотомия)

Пусть мы нашли такие точки x_0, x_1, что $f(x_0)f(x_1) \le 0$, т. е. на отрезке $[x_0, x_1]$ лежит не менее одного корня уравнения. Найдем середину отрезка $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$ и вычислим $f(x_2)$. Из двух половин отрезка выберем ту, для которой $f(x_2)f(x) \le 0$, ибо один из корней лежит на этой половине. Затем, новый отрезок опять делим пополам и выберем ту половину, на концах которой функция имеет разные знаки, и т. д.

Если требуется найти корень с точностью ε, то продолжаем деление пополам до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ε. Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с требуемой точностью.Скорость сходимости невелика: за одну итерацию точность увеличивается примерно вдвое, т. е. уточнение трех цифр требует 10 итераций. Зато точность ответа гарантируется.

Недостатки метода:

1. Для начала расчета надо найти отрезок, на котором функция меняет знак. Если в этом отрезке несколько корней, то заранее неизвестно, к какому из них сойдется процесс (хотя к одному из них сойдется).

2. Метод неприменим к корням четной кратности.

3. Для корней нечетной высокой кратности он сходится, но менее точен и хуже устойчив к ошибкам округления, возникающим при вычислении *f(x)*.

4. На системы уравнений дихотомия не обобщается.

4.3 Удаление корней

Один из недостатков дихотомии – сходимость неизвестно к какому корню – имеется почти у всех итерационных методов. Его можно устранить удалением уже найденного корня. Если $\bar{x}_1$ есть простой корень уравнения (15) и *f(x)* –непрерывна, то вспомогательная функция $g(x) = \frac{f(x)}{x - \bar{x}_1}$ непрерывна, причем все нули функций *f(x)* и *g(x)* совпадают, за исключением $\bar{x}_1$, ибо $g(\bar{x}_1) \ne 0$. Если $\bar{x}_1$ - кратный корень, уравнения (1), то он будет нулем *g(x)* кратности на единицу меньше; остальные нули обеих функций по-прежнему будут одинаковы. Поэтому найденный корень можно удалить, т. е. перейти к функции *g(x)*. Тогда нахождение остальных нулей *f(x)* сведется к нахождению нулей *g(x)*. Когда мы найдем какой-нибудь корень $\bar{x}_2$ функции *g(x)*, то этот корень тоже можно удалить, вводя новую вспомогательную функцию $\varphi(x) = \frac{g(x)}{x - \bar{x}_2} = \frac{f(x)}{(x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2)}$. Так можно последовательно найти все корни *f(x)*.